Índice

1. Derivadas y sus aplicaciones

Introducción

Un artesano que tiene un taller a 10 km del río participará de una exposición que se realizará en una ciudad ubicada en la misma margen del río, a 60 km del taller. El artesano contratará un camión para el traslado terrestre y una barcaza. El precio del traslado en barcaza es el 75% del precio del traslado en camión. ¿En qué punto de la orilla deberá cargar la mercadería en la barcaza para que el costo del transporte sea mínimo? (Nota: suponer que el tramo de costa considerado en el problema es recto en toda su extensión.)

1.1 DERIVADA

Recta tangente a una curva $\mathcal{C}$ en un punto P

Dada una curva $\mathcal{C}$ y un punto P perteneciente a ella, elegimos sobre $\mathcal{C}$ un punto Q distinto de P.
P y Q determinan una recta secante a la curva $\mathcal{C}$ (fig. 1).
Si Q se "mueve" sobre $\mathcal{C}$ "acercándose" a P, la recta s "se aproxima" a la recta t.

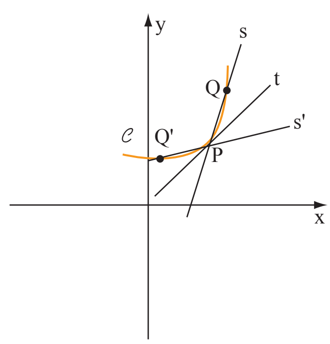


Fig. 1

De la misma manera, la recta s', determinada por P y Q', se "aproxima" a t cuando Q' se "acerca" sobre la curva a P.

La recta t es la tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto P.

Así, queda definida la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en P como la posición límite a la cual tienden las secantes por la derecha y por la izquierda del punto P.

Observación: la tangente no siempre existe, aun en el caso en que la función sea continua.

Ejemplo 1

Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ las curvas de las figuras 2, 3 y 4 respectivamente

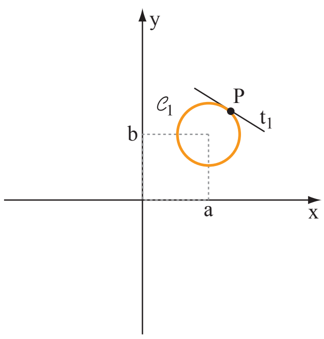


Fig. 2

t_1 es tangente a $\mathcal{C}$ en P (único punto en común con la curva).

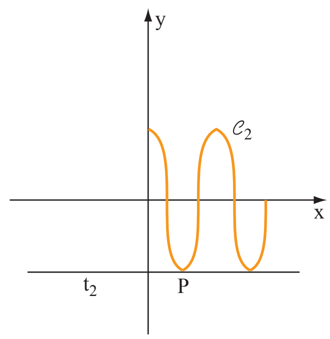


Fig. 3

t_2 es tangente a $\mathcal{C}_2$ en P (C_2 y t_2 tienen infinitos puntos en común).

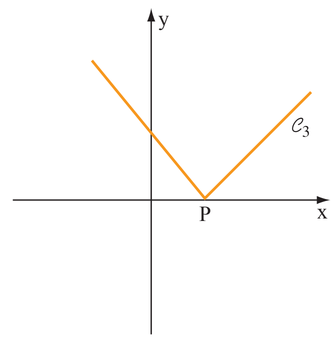


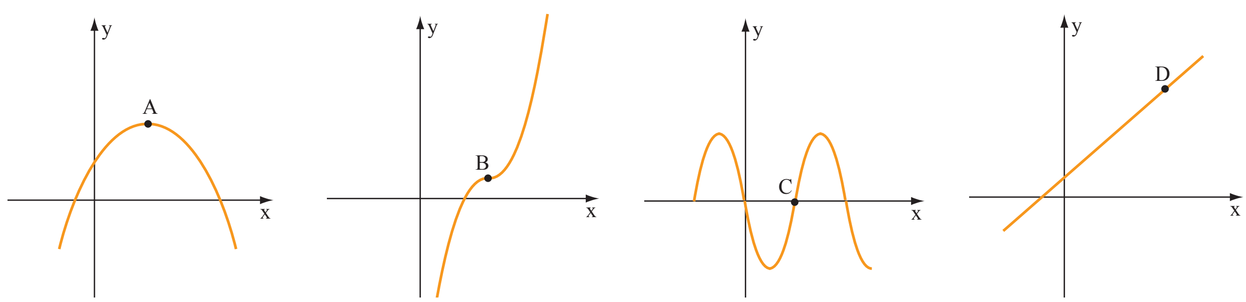
Fig. 4

no existe tangente a $\mathcal{C}_3$ en P.

Observemos que no existe tangente a $\mathcal{C}_3$ en P, pues la posición límite a la cual tienden las secantes es distinta según se aproximen por la derecha o por la izquierda de P.

Para aplicar - A

a. Trazar las tangentes a las siguientes curvas en los puntos indicados:



b. Indicar V o F. Justificar.

b_1) Toda recta tangente a una elipse tiene un solo punto en común con la curva.

b_2) Si una recta es tangente a una sinusoide, entonces tiene infinitos puntos en común con la curva.

b_3) Toda recta que tiene un solo punto en común con una curva es tangente a la misma en dicho punto.

b_4) Algunas rectas tangentes a una curva tienen un solo punto en común con dicha curva.

Derivada de una función en un punto

Sea f una función definida en el intervalo (a,b) y P un punto de coordenadas $(x_0;y_0)$ tal que x_0 ε (a,b) y $f(x_0) = y_0$ (fig. 5)

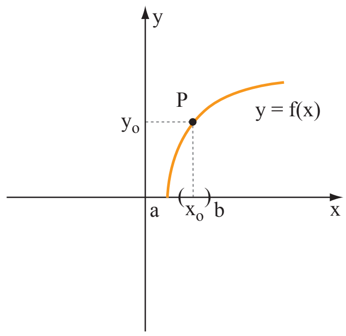


Fig. 5

Si damos a x_0 un incremento Δx_0 suficientemente pequeño de manera tal que $x_0 + \Delta x_0$ pertenezca al (a, b), entonces al pasar de x_0 a $x_0 + \Delta x_0$ la función también se incrementa. Llamando Δy_0 al incremento de la función, resulta:

$$f(x_0 + \Delta x_0) = y_0 + \Delta y_0 \qquad \text{(fig. 6)}$$

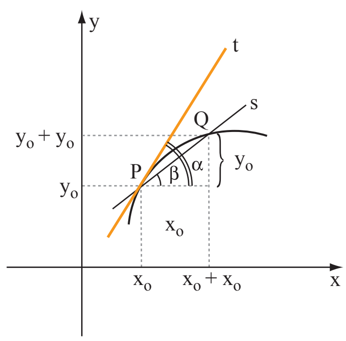


Fig. 6

Como el incremento Δx_0 se ha tomado suficientemente pequeño, el punto Q de coordenadas $(x_0 + \Delta x_0; y_0 + \Delta y_0)$ perteneciente a la gráfica de la función resulta muy próximo a P y esta proximidad de Q a P será mayor cuanto menor sea Δx_0.

Luego, si $\Delta x_0 \to 0$, Q se "moverá" sobre la curva hacia P y la secante s determinada por dichos puntos tenderá a la recta tangente t.

Observemos que cuando s tiende a t, β tiende a α (fig. 6) y por consiguiente la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la recta tangente.

Es decir:

$$\text{pend. de } s = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \text{pend. de } s = \operatorname{tg} \alpha = \text{pend. de } t$$

luego:

$$\text{pend. de } t = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

bajo la condición de que el límite exista.

Llamamos $f'(x_0)$ a la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0:

$$f'(x_0) = \text{pend. de } t = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

$f'(x_0)$ es la derivada de f en el punto x_0.

Ejemplo 2

Obtener la derivada de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 3$.

1) Calculamos el incremento Δy_0.

$f(x_0 + \Delta x_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 = (3 + \Delta x_0)^2 = 9 + 6\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2$

$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \cancel{9} + 6\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2 - \cancel{9} = 6\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2$

2) Formamos el cociente $\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$.

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{6\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0}$$

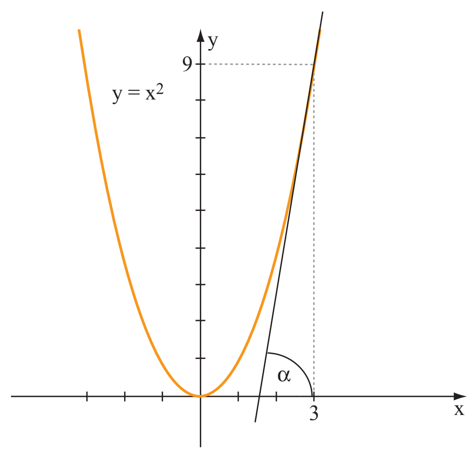
3) Calculamos el límite del cociente de incrementos para $\Delta x_0 \to 0$.

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{6\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0}$$

Sacando factor común Δx_0, salvamos la indeterminación:

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta x_0 (6 + \Delta x_0)}{\Delta x_0} = 6$$

luego: $f'(3) = 6 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 6$



Para aplicar - B

a. Completar:

$a_1)$ $f(x) = x^2 + 4;\ x_0 = -1$

$f(x_0) =$

$f(x_0 + \Delta x_0) =$

$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) =$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} =$$

$f'(x_0) =$

$a_2)$ $f(x) = -x^2 + 2x$; $x_0 = 3$

$f(x_0) =$

$\dfrac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} =$

$f'(x_0) =$

$f(x_0 + \Delta x_0) =$

$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) =$

$\lim\limits_{\Delta x_0 \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} =$

$a_3)$ $f(x) = x^3$; $x_0 = 1$

$f(x_0) =$

$\dfrac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} =$

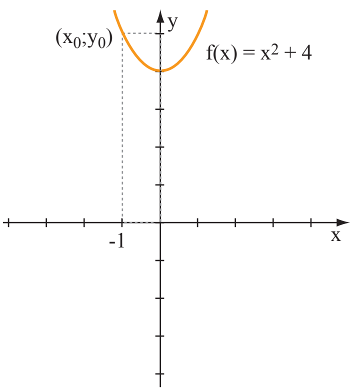
$f'(x_0) =$

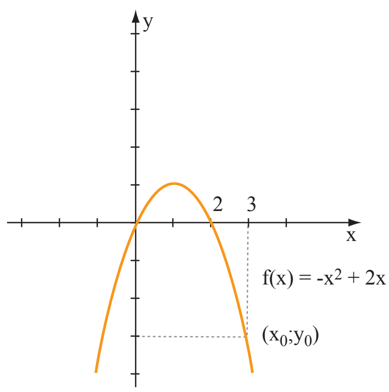
$f(x_0 + \Delta x_0) =$

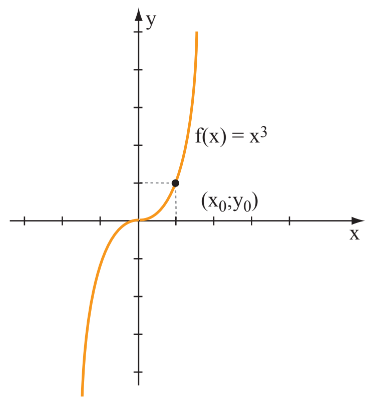
$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) =$

$\lim\limits_{\Delta x_0 \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} =$

b. Dadas las gráficas de las funciones correspondientes a la parte a) trazar en cada caso la tangente en $(x_0 ; y_0)$.







Cálculo de derivadas

Hasta ahora hemos calculado la derivada de una función en un punto x_0 perteneciente a un intervalo (a, b).

Si x es un punto cualquiera del (a, b) y Δx es un incremento positivo o negativo suficientemente pequeño de manera tal que $x + \Delta x$ pertenezca al intervalo (a, b), llamamos derivada de f al límite cuando $\Delta x \to 0$ del cociente de incrementos, siempre que ese límite exista.

Es decir:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (1)}$$

Observamos que si f tiene derivada en cada punto x, es decir, si el límite (1) existe, se obtiene a partir de f una nueva función que hace corresponder a cada valor de x la derivada de f(x). Esta función así definida se designa f'(x).

Ejemplo 3

Obtener la derivada de la función constante f (x) = c.

Como f es constante, $f(x + \Delta x) = c$.

luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto:

La derivada de la función constante es cero.

Para aplicar - C

a. Completar:

a_1) $f(x) = x$

$\Delta y =$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$f'(x) =$

a_2) $f(x) = x^2$

$\Delta y =$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$f'(x) =$

En general:

Si $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n\, x^{n-1}$ para todo $n \in N$

Este resultado vale también si el exponente es un número real, es decir:

Si $f(x) = x^a$ $(x > 0)$ es $f'(x) = a\, x^{a-1}$ para todo $a \in R$

b. Calcular f'(x) en cada uno de los siguientes casos, aplicando la fórmula anterior:

b_1) $f(x)=\sqrt{x}$

b_2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

b_3) $f(x) = x^{-4}$

b_4) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$

b_5) $f(x)=\frac{1}{x^6}$

c. Completar:

c_1) $f(x) = \text{sen } x$

$f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$f'(x) =$

c_2) $f(x) = \cos x$

$f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$f'(x) =$

> Si $f(x) = \text{sen } x$ entonces $f'(x) = \cos x$.
>
> Si $f(x) = \cos x$ entonces $f'(x) = - \text{sen } x$.

Tabla de derivadas

A partir de la definición de derivada es posible calcular, siempre que exista, la derivada de cualquier función.

En la tabla siguiente aparecen algunas derivadas elementales. A partir de estas y utilizando las reglas de derivación, es posible calcular otras derivadas sin necesidad de recurrir a su definición.

f(x)	**f'(x)**
c	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^a\ (x > 0)$	$a\,x^{a-1}$
$\text{sen } x$	$\cos x$
$\cos x$	$- \text{sen } x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log x$	$\frac{1}{x} \log e$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x

Reglas de derivación

• Derivada del producto de una constante por una función

Si $y = f(x)$ es una función derivable en un intervalo (a, b) y c es una constante, entonces $c. f(x)$ es también derivable y se cumple:

$$\boxed{(c.\ f(x))' = c.\ f'(x)}$$

Es decir:
La derivada del producto de una constante por una función derivable es el producto de la constante por la derivada de dicha función.

Ejemplo 4

$$\text{Si } f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad c = 5$$

entonces

$$(5x^2)' = 5\,(x^2)' = 5.2.x = 10x$$

• Derivada de la suma de dos funciones

Si f y g son dos funciones derivables en un intervalo (a, b) entonces $f + g$ es derivable en (a, b) y se cumple:

$$\boxed{(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

Es decir:
La derivada de una suma de dos funciones derivables es la suma de las derivadas de dichas funciones.

Ejemplo 5

$$\text{Si } f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

entonces

$$(f + g)(x) = x^2 + x^3$$

$$\text{y} \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 3x^2$$

• Derivada de la diferencia de funciones

Si f y g son funciones derivables en (a, b), entonces $f - g$ es derivable en (a, b) y se cumple:

$$\boxed{(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)}$$

Es decir:
La derivada de la diferencia de dos funciones derivables es la diferencia de las derivadas de dichas funciones.

Ejemplo 6

$$\text{Si } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

entonces:

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - x$$

$$\text{y} \quad (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

• Derivada del producto de funciones

Si f y g son funciones derivables en (a, b), entonces f.g es derivable en (a, b) y se cumple:

$$\boxed{(f\,.\,g)'\,(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)}$$

Es decir:

La derivada del producto de dos funciones derivables es el producto de la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más el producto de la primera sin derivar por la derivada de la segunda función.

Ejemplo 7

$$\text{Si } f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x$$

entonces:

$$(f\,.\,g)\,(x) = x^3$$

$$\text{y} \qquad (f\,.\,g)'\,(x) = 2x\,.\,x + x^2\,.\,1 = 3x^2$$

• Derivada de un cociente de funciones

Si f y g son derivables en (a, b) y $g \neq 0$ en (a, b), entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en (a, b) y se cumple:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,.\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Es decir:

La derivada de un cociente de funciones es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividida esta diferencia por el cuadrado del denominador.

Ejemplo 8

$$\text{Si } f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^3$$

entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,.\,x^3 - \sqrt{x}\,.\,3x^2}{(x^3)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}\,.\,x^{\cancel{3}2}}{2\cancel{x}} - 3\sqrt{x}\,x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}\,.\,x^2}{2} - 3\sqrt{x}\,x^2}{x^6} = \frac{-\frac{5}{2}\sqrt{x}\,x^2}{x^6} = \frac{-5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$$

Para aplicar - D

a. Calcular f'(x) utilizando la regla de derivación del producto de funciones:

a_1) $f(x) = x\,(x^4 - 2x)$

a_2) $f(x) = \text{sen } x \,.\, \cos x$

a_3) $f(x) = x \cos x$

b. Calcular en cada uno de los siguientes casos f'(x) aplicando la regla de derivación del cociente de funciones:

b_1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

b_2) $f(x) = \text{tg } x$

b_3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$

Derivada de una función compuesta

Recordamos el concepto de función compuesta.

Dadas dos funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, se define una nueva función de A en C, que indicamos g o f, de la siguiente manera:

$$(g \circ f)\,(x) = g\,(f(x))$$

Es decir, la composición de g o f es la función que hace corresponder a cada x ε A un y ε C tal que y = g (f(x)) (fig. 7).

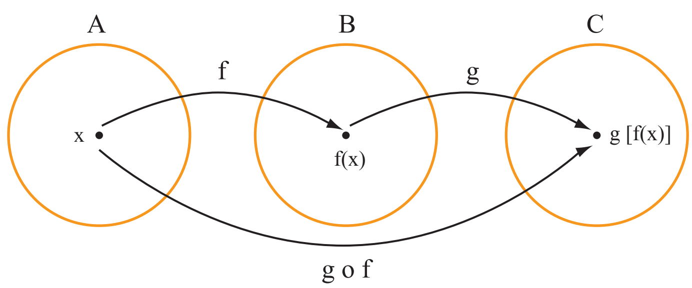


Fig. 7

Ejemplo 9

Si $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$

entonces:

$(g \circ f)\,(x) = g\,(f(x)) = \text{sen } 3x^2$

Ejemplo 10

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^4$

entonces:

$(g \circ f)\,(x) = g\,(f(x)) = (2x + 1)^4$

Para calcular la derivada de una función compuesta debemos tener en cuenta las funciones que la componen. Si f y g son dos funciones derivables en A y B respectivamente, entonces g o f es derivable en A y se cumple:

$$\boxed{(gof)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \,.\, f'(x)}$$

Ejemplo 11

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$

entonces:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \text{sen } x^2$

y $(\text{sen } x^2)' = g'(f(x)) \,.\, f'(x) = \cos x^2 \,.\, 2x$

es decir:

$(\text{sen } x^2)' = 2x \cos x^2$

Ejemplo 12

Calcular la derivada de $h(x) = (x - 1)^3$.

Observemos que $y = h(x)$ puede expresarse como la composición de $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^3$, es decir:

$h(x) = g(f(x)) = (x - 1)^3$

luego:

$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = 3(x - 1)^2 \,.\, 1 = 3(x - 1)^2$

Observación: la fórmula $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \,.\, f'(x)$ se llama regla de derivación en cadena y en la práctica se aplica de la siguiente manera:

Ejemplo 13

Calcular la derivada de $f(x) = \text{sen}^3 x$.

1) Derivamos la función con respecto al cubo: $3 \text{ sen}^2 x$

2) Derivamos con respecto al seno: $3 \text{ sen}^2 x \,.\, \cos x$

luego:

$f'(x) = 3 \text{ sen}^2 x \,.\, \cos x$

El orden elegido para derivar las funciones es inverso al orden que se sigue para calcular el valor de f(x), pues en este caso calculamos primero sen x y luego lo elevamos al cubo.

Ejemplo 14

Calcular la derivada de $f(x) = \text{sen}^3(2x)$

1) Derivamos con respecto al cubo: $3 \text{ sen}^2(2x)$

2) Derivamos con respecto al seno: $3 \text{ sen}^2(2x) \,.\, \cos(2x)$

3) Derivamos con respecto a 2x: $3 \text{ sen}^2 2x \,.\, \cos 2x \,.\, 2$

luego:

$f'(x) = 6 \text{ sen}^2 2x \,.\, \cos 2x$

Derivadas sucesivas

Dada una función $f: A \rightarrow R$ ($A \subset R$) derivable, su derivada es una función de x y puede tener por lo tanto una derivada. Si esto ocurre, llamamos a esta derivada de la derivada de f "derivada segunda de f".

Es decir:

$(f'(x))' = f''(x)$ (derivada segunda de f)

La derivada $f'(x)$ se llama derivada primera de f.

Como f'' es también una función de x, puede tener a su vez una derivada. Si esto ocurre llamamos a esta última derivada "derivada tercera de f".

Es decir:

$(f''(x))' = f'''(x)$ (derivada tercera de f)

Análogamente se definen las derivadas sucesivas de f obteniéndose a partir de la derivación de la derivada de un cierto orden n la derivada de orden n + 1.

Ejemplo 15

Obtener las derivadas sucesivas de $f(x) = x^5$.

$f'(x) = 5x^4$ $\qquad f^{IV}(x) = 120x$

$f''(x) = 20x^3$ $\qquad f^{V}(x) = 120$

$f'''(x) = 60x^2$ $\qquad f^{VI}(x) = 0$

A partir de la derivada de orden 6, son todas las derivadas sucesivas iguales a cero.

Ejemplo 16

Calcular las derivadas sucesivas de $f(x) = \text{sen } x$.

$f'(x) = \cos x$ $\qquad f''(x) = - \text{sen } x$

$f'''(x) = - \cos x$ $\qquad f^{IV}(x) = \text{sen } x$

A partir de la derivada de orden 4 de $f(x) = \text{sen } x$, las derivadas sucesivas se repiten periódicamente.

Para aplicar - E

a. Calcular en cada caso la derivada de f aplicando la regla de derivación en cadena.

$a_1)$ $f(x) = \text{sen } 5x$ $\qquad a_2)$ $f(x) = (3x + 2)^5$

$a_3)$ $f(x) = \ln(\text{sen } x)$ $\qquad a_4)$ $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

$a_5)$ $f(x) = \cos^5(3x^2 + 1)$

b. Calcular las derivadas sucesivas de f en cada uno de los siguientes casos:

$b_1)$ $f(x) = 3x^3$ $\qquad b_2)$ $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$

$b_3)$ $f(x) = \cos x$ $\qquad b_4)$ $f(x) = (x + 3)^3$

Interpretación física de la derivada

La expresión $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ es la función horaria $x = f(t)$ que corresponde al MRUV (movimiento rectilíneo uniformemente variado).

Esta función permite establecer la posición (abscisa) del móvil para cualquier valor del tiempo t cuando se conocen x_0, v_0 y a, donde:

x_0 es la abscisa en el instante $t = 0$ (constante)
v_0 es la velocidad inicial (constante)
a es la aceleración (constante)

Como $x = f(t)$ es una función derivable, existe la derivada primera y es

$f'(t) = v_0 + at$ que es la fórmula de la velocidad en el MRUV.

Derivando $f'(t)$ se obtiene:

$$f''(t) = a$$

En el MRUV, la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo y la velocidad es la derivada de la función horaria respecto del tiempo.

Para aplicar - F

a. Determinar la aceleración que adquiere un cuerpo sometido a un movimiento cuya función horaria es $x = f(t) = 6 - 3t + t^2$.

b. Determnar la velocidad de un cuerpo en el instante $t = 2$ seg, si la función horaria del movimiento es $x = f(t) = 5t + 10t^2$.

PARA EJERCITAR

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad x_0 = \frac{3}{2}$

b) $f(x) = 2x - x^3 + x^4 \quad ; \quad x_0 = -\frac{1}{2}$

c) $f(x) = 3 . \sqrt{x} \quad ; \quad x_0 = 2$

d) $f(x) = \text{sen } x \quad ; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$

e) $f(x) = \ln x \quad ; \quad x_0 = \frac{3}{2}$

f) $f(x) = 2^x + x^2 \quad ; \quad x_0 = 1$

g) $f(x) = \cos x + 3 \text{ sen } x \quad ; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x \quad ; \quad x_0 = -1$

2. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0, siendo:

a) $f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4 \quad , \quad x_0 = 0$

c) $f(x) = -x^2 + 5 \quad , \quad x_0 = -1$

3. Calcular la pendiente y la inclinación de la tangente a cada una de las siguientes parábolas en el punto de abscisa $x = 2$. Representar gráficamente.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x$ b) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

4. Dada $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en $x_0 = 3$. Graficar.

5. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el origen y es paralela a la recta t, siendo t la tangente a $f(x) = x^3 + 2$ en $x_0 = -1$.

6. Hallar el punto de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ en el cual la inclinación de la tangente es de 45º.

7. Determinar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo (0,5) que forma un ángulo de 135º con el eje X.

8. Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$ b) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = (x^2 + x) \log x$ d) $f(x) = \ln . 2^x$

e) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

g) $f(x) = \frac{\cos x}{x + 1}$

9. Dada $f(x) = \frac{1}{x + 2}$, hallar los puntos de su gráfica donde la recta tangente tiene pendiente $-\frac{1}{9}$.

10. Hallar los puntos de la gráfica en los cuales la tangente a $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ tiene una inclinación de 45º.

11. Derivar las siguientes funciones.

a) $f(x) = (2x^2 - 1)^5$ b) $f(x) = \operatorname{sen}^3 (8x + 1)$

c) $f(x) = e^{2x^2+1}$ d) $f(x) = \cos (\ln x)$

e) $f(x) = 3^{\ln 2x}$

12. Calcular las derivadas sucesivas de f en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = x^5 + 4x$
b) $f(x) = (2x^3 - 1)^2$
c) $f(x) = x . e^x$

13. Calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x) = \operatorname{sen} 4x$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

14. Calcular para qué valores de x se anula la derivada de $f(x) = x^3 - 2x$.

15. Calcular para qué valores de x la derivada de $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ es igual a -4.

16. Dada $f(x) = -x^3$, calcular el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva en $x_0 = 1$. Graficar.

17. Dada $f(x) = - x^4 + 6x^2$, calcular para qué valores de x se anula la derivada segunda de f.

18. Se deja caer una pelota con una velocidad inicial de 30 m/seg. Determinar su velocidad a los 3 segundos ($g \cong 10$ m/seg^2).

19. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial de 40 m/seg. Calcular su velocidad en el instante t = 2 seg.

20. Determinar la aceleración que adquiere un cuerpo sometido a un movimiento cuya función horaria es $f(t) = 3 - 2t + 3t^2$.

1.2 VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES

Función estrictamente creciente en un punto x_0 de su dominio

Dada $f: A \rightarrow R$ ($A \subset R$), decimos que f es estrictamente creciente en $x_0 \in A$ (fig. 8) si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \delta) \subset A$, tal que:

si $x_1, x_2 \in E(x_0, \delta)$ y $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$

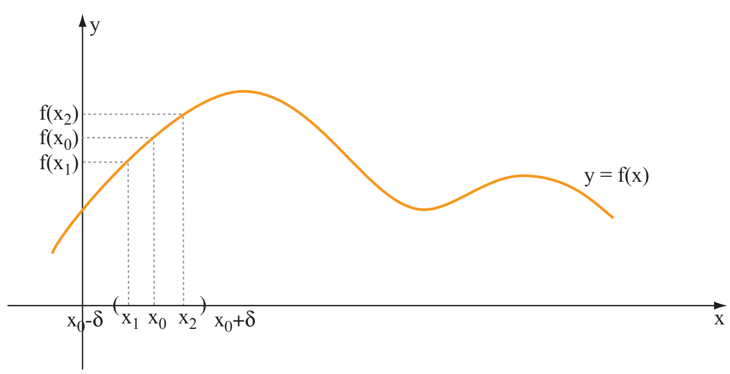


Fig. 8

Trazando la tangente a $y = f(x)$ en $(x_0 ; f(x_0))$ (fig. 9)

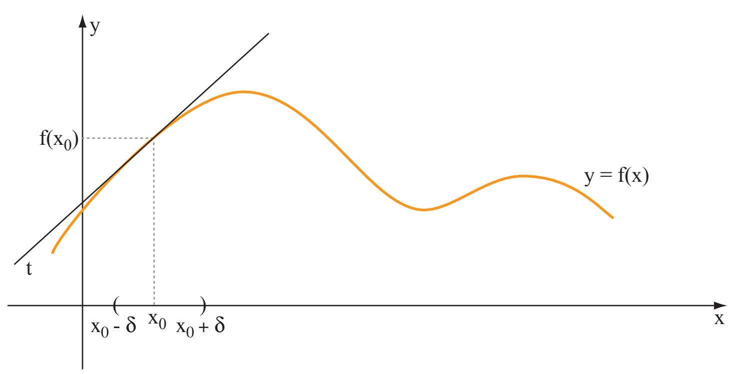


Fig. 9

observamos que t, tangente en $(x_0 ; f(x_0))$, tiene pendiente positiva, y como

$$\text{pend. de } t = f'(x_0)$$

resulta que la derivada de la función en x_0 es positiva.

Función estrictamente decreciente en un punto x_0 de su dominio

Dada f: $A \rightarrow R$ $(A \subset R)$, decimos que f es estrictamente decreciente (fig. 10) en $x_0 \ \varepsilon \ A$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \delta) \subset A$ tal que:

si $x_1, x_2 \ \varepsilon \ E(x_0, \delta)$ y $x_1 < x_0 < x_2$ $\quad f(x_1) > f(x_0) > f(x_1)$

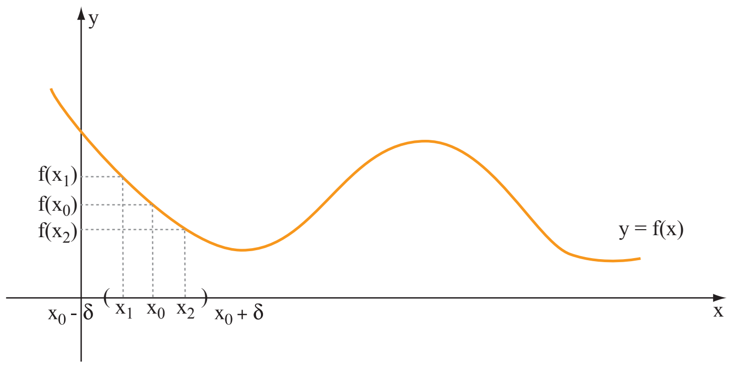


Fig. 10

Trazando la recta t, tangente a $y = f(x)$ en el punto de coordenadas $(x_0 ; f(x_0))$ (fig. 11), se ve que la pendiente de t es negativa.

Luego, como

$\text{pend. de } t = f'(x_0)$

resulta que :

$f'(x_0) < 0$

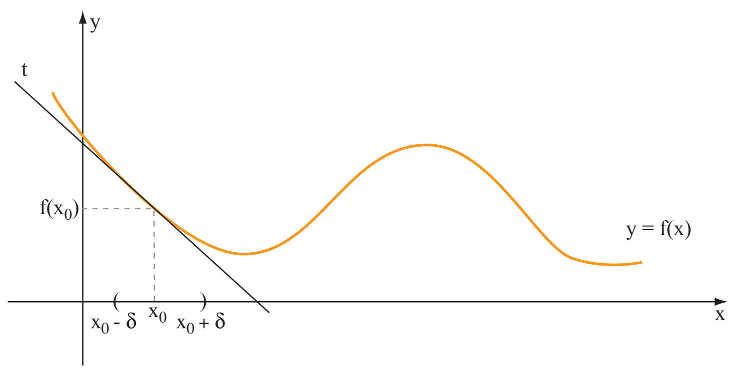


Fig. 11

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 1

Si f: $A \to R$, $(A \subset R)$ es derivable en $(a, b) \subset A$ y $x_0 \in (a, b)$

Entonces:

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en x_0.
$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en x_0.

Función estrictamente creciente en un intervalo

Dada f: $A \to R$, $(A \subset R)$, decimos que f es estrictamente creciente en el intervalo (a,b) (fig. 12)($(a,b) \subset A$) si:

para todo par de puntos $x_1, x_2 \in (a, b)$ tal que $x_1 < x_2$ se cumple

$f(x_1) < f(x_2)$

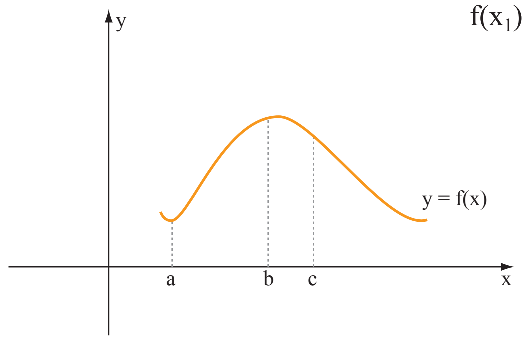


Fig. 12

Así, f (fig. 12) es creciente en (a,b) mientras que en (a,c) no lo es.

Observemos que si trazamos la tangente a la curva en cualquier punto de coordenadas (x ; f(x)) con $x \in (a, b)$ la pendiente de dicha tangente es positiva. Luego, si $x \in (a, b)$ resulta $f'(x) > 0$ (fig. 13).

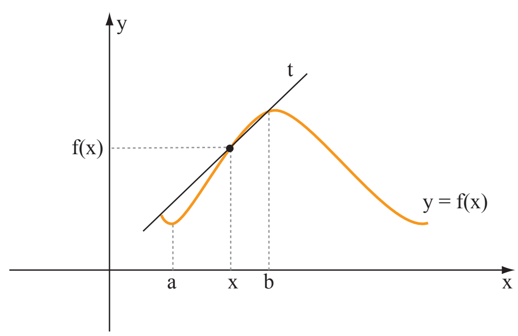


Fig. 13

Función estrictamente decreciente en un intervalo

Dada f: $A \to R$, $(A \subset R)$, decimos que f es estrictamente decreciente en (a,b) $((a,b) \subset A)$ (fig. 14) si: para todo par de puntos x_1, x_2 ε (a, b) tal que $x_1 < x_2$ se cumple

$$f(x_1) > f(x_2)$$

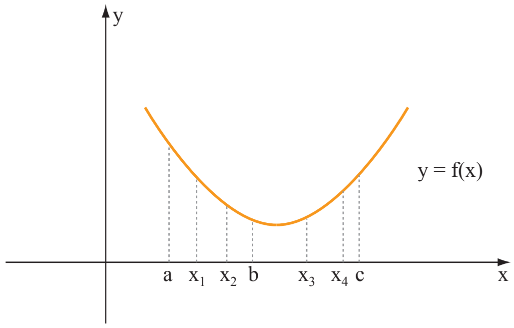


Fig. 14

Así, f (fig. 14) es estrictamente decreciente en (a, b), pero no lo es en (a, c), pues, si bien x_2, x_3 ε (a, c) y $x_2 < x_3$ y $f(x_2) > f(x_3)$, eligiendo el par de puntos x_2, x_4 se verifica $x_2 < x_4$ pero $f(x_2) < f(x_4)$.

Observemos que si trazamos la tangente t en cualquier punto (x ; f(x)) con x ε (a, b), la pendiente de dicha recta es negativa. Luego, si x ε (a, b) resulta $f'(x) < 0$ (fig. 15).

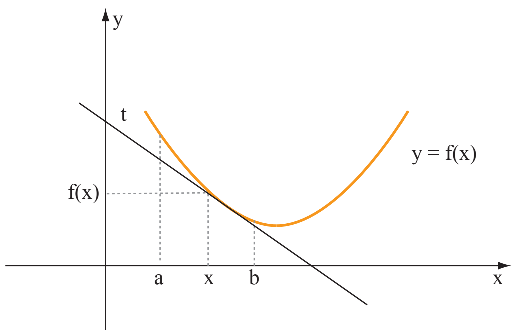


Fig. 15

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 2

Si f: $A \to R$, $(A \subset R)$ es continua en [a,b] $[(a,b] \subset A)$ y derivable en (a,b)

Entonces:

$f'(x) > 0$ para todo x ε (a,b) $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en (a,b).
$f'(x) < 0$ para todo x ε (a,b) $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en (a,b).

Utilizando el teorema 2 podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Ejemplo 1
Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

1) Hallamos f'(x):

$$f'(x) = 2x + 5$$

2) Determinamos el conjunto de puntos que verifica f'(x) > 0.

$$2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

luego:

la función es creciente en $(-\frac{5}{2}, +\infty)$

3) Determinamos el conjunto de puntos que verifica f'(x) < 0

$$2x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$$

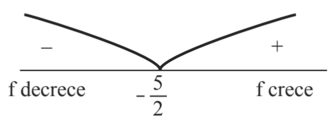
luego:

la función es decreciente en $(-\infty, -\frac{5}{2})$

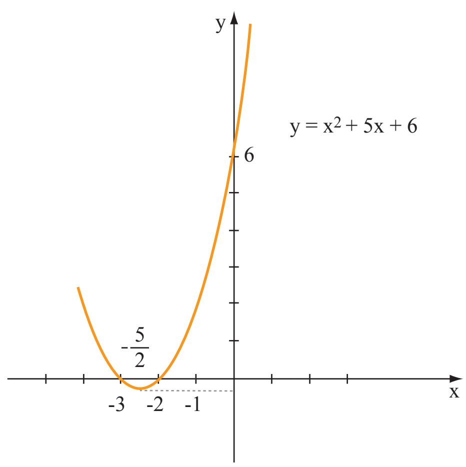
4) Intervalo de crecimiento: $(-\frac{5}{2}, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(-\infty, -\frac{5}{2})$

5) Representamos mediante el siguiente diagrama los signos de la derivada de f.



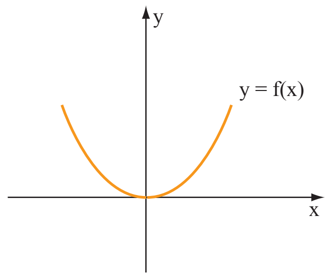
6) Gráfica de $y = x^2 + 5x + 6$



Para aplicar - G

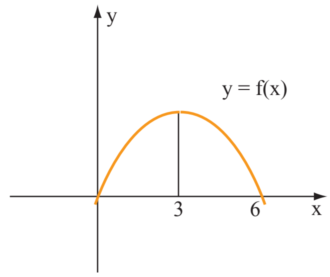
a. Completar indicando el intervalo correspondiente:

a$_1$)



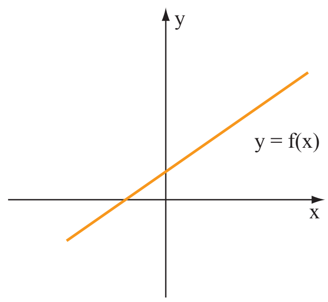
f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

a$_2$)



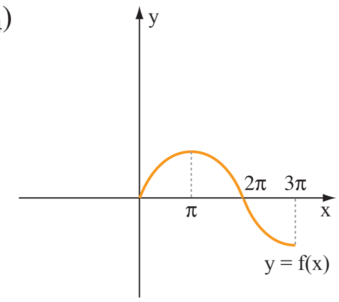
f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

a$_3$)



f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

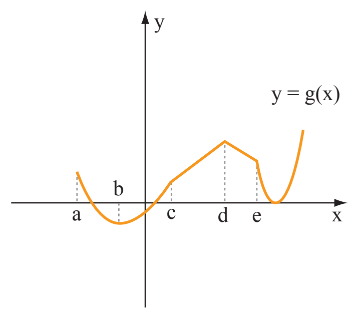
a$_4$)



f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

b. Indicar V o F.

b$_1$) g es creciente en (b,c)
b$_2$) g es decreciente en (d,e)
b$_3$) g es decreciente en (a,c)
b$_4$) g es creciente en (e,f)
b$_5$) g es decreciente en (f,∞)



c. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^2 - 7x + 12$ siguiendo los pasos indicados:

1) Hallar $f'(x)$.
2) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) > 0$.
3) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) < 0$.
4) Determinar:
   Intervalo de crecimiento
   Intervalo de decrecimiento
5) Diagrama
6) Gráfica de la función

d. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = - x^2 + 2x - 1$ siguiendo los pasos indicados:

1) Hallar f'(x).
2) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) > 0$.
3) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) < 0$.
4) Determinar:
   Intervalo de crecimiento
   Intervalo de decrecimiento
5) Diagrama
6) Gráfica de la función

e. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \text{sen } x$ en $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ siguiendo los pasos indicados:

1) Hallar f'(x).
2) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) > 0$.
3) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) < 0$.
4) Determinar:
   Intervalo de crecimiento
   Intervalo de decrecimiento
5) Diagrama
6) Gráfica de la función

Máximos y mínimos

Máximo relativo

Dada $f: A \to R$, $(A \subset R)$, decimos que f tiene un máximo relativo en $x_0 \varepsilon A$ si es posible hallar un entorno de x_0, $E(x_0, \delta) \subset A$ tal que para todo x perteneciente a ese entorno sea $f(x_0) \geq f(x)$ (fig. 16).

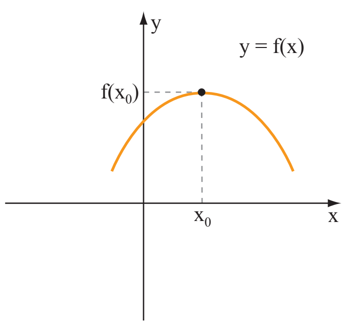


Fig. 16

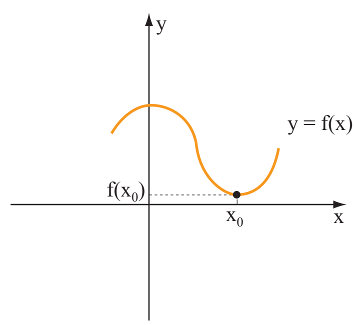


Fig. 17

Mínimo relativo

Dada $f: A \to R$, $(A \subset R)$, decimos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \varepsilon A$ si es posible hallar un entorno de x_0, $E(x_0, \delta) \subset A$ tal que para todo x perteneciente a ese entorno sea $f(x_0) \leq f(x)$ (fig. 17).

En la búsqueda de un máximo o de un mínimo relativo se comparan los valores de la función en un punto con los valores que toma la función en un entorno de ese punto.

Observemos que si x_0 es un punto donde la función alcanza un máximo relativo y la derivada existe y es finita, entonces:

1) $f'(x_0)$ no puede ser negativa porque la función en ese caso sería decreciente en x_0.
2) $f'(x_0)$ no puede ser positiva porque en ese caso sería f creciente en x_0.

Luego, debe ser $f'(x_0) = 0$.
Gráficamente se ve que en ese punto la tangente a $y = f(x)$ es horizontal (fig. 18).

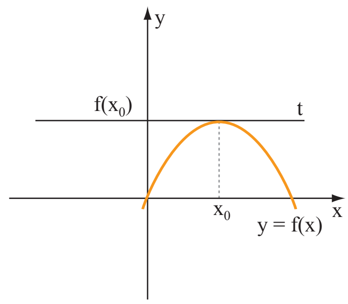


Fig. 18

Análogamente, si en x_0 f tiene un mínimo relativo y $f'(x_0)$ existe y es finita, entonces debe ser $f'(x_0) = 0$ y la tangente también resulta horizontal (fig. 19).

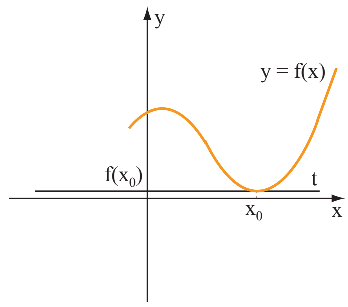


Fig. 19

Teorema 3

Sea $f: A \to R$, $(A \subset R)$ derivable en $x_0 \, \varepsilon \, A$. Si en x_0 la función tiene un máximo o un mínimo relativo entonces $f'(x_0) = 0$.

Podemos afirmar que:

Si en x_0 f tiene un máximo relativo entnces $f'(x_0) = 0$
Si en x_0 f tiene un mínimo relativo entonces $f'(x_0) = 0$

Sin embargo, la condición $f'(x_0) = 0$ no es suficiente para asegurar la existencia de máximo o mínimo relativo en x_0.

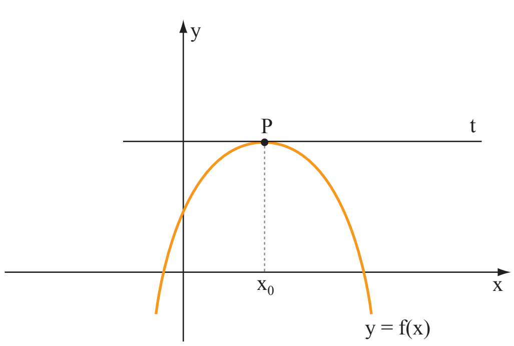


Fig. 20

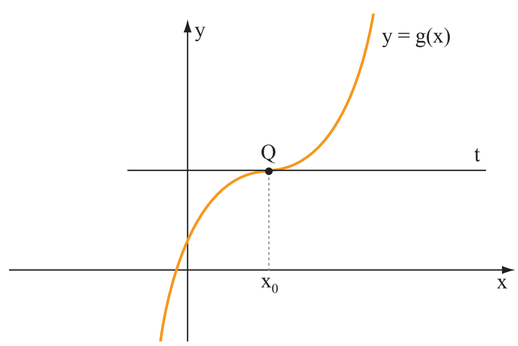


Fig. 21

Así, en la figura 20 se ve que en el punto P = (x_0 ; $f(x_0)$) la función tiene tangente horizontal y alcanza un máximo relativo en x_0, mientras que y = g (x) (fig. 21) tiene en Q = (x_0 ; $f(x_0)$) tangente horizontal pero no alcanza en x_0 máximo ni mínimo relativo.

Por lo tanto, para determinar un máximo o mínimo relativo, además de buscar el punto x_0 donde $f'(x_0) = 0$, es necesario analizar el comportamiento de la función en un entorno de x_0.

Ejemplo 3

La función cuya gráfica se representa en la figura 22 tiene un máximo en x_0.

Observemos que en x_0 la función pasa de creciente a decreciente en un entorno de x_0. Es decir, la tangente pasa de positiva a la izquierda de x_0 a negativa a la derecha de x_0 en dicho entorno.

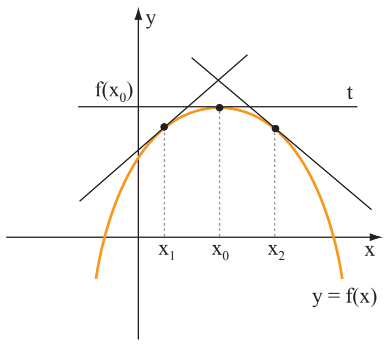


Fig. 22

Ejemplo 4

La función representada en la figura 23 tiene un mínimo en x_0. En dicho punto la función pasa de decreciente a creciente.

Luego en un entorno de x_0 la tangente pasa de negativa a la izquierda de x_0 a positiva a la derecha de x_0.

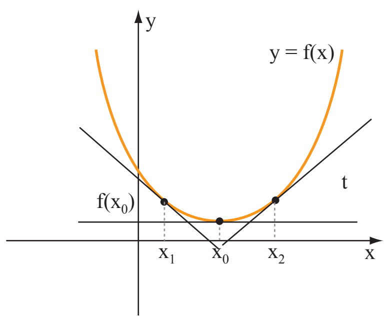


Fig. 23

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 4

Si en un entorno de x_0, al crecer x pasando por el valor x_0, la derivada f' pasa de:

a) positiva a negativa, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
b) negativa a positiva, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
c) positiva a positiva o de negativa a negativa, entonces f no tiene extremo relativo en x_0.

Aclaración: los máximos y mínimos relativos se llaman extremos relativos.

Ejemplo 5

Dada f: R $\to$ R por $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$, hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada de la función.

1) Determinamos los puntos en los cuales se anula f'(x).

$f'(x) = 2x^2 - 4x$

$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x\,(x - 2) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

o

$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

La derivada se anula entonces en $x_1 = 0$ y en $x_2 = 2$

2) Analizamos el comportamiento de la función en un entorno de x_1 y luego en un entorno de x_2.

Si $x < 0$ es $f'(x) = 2x\,(x - 2) > 0$

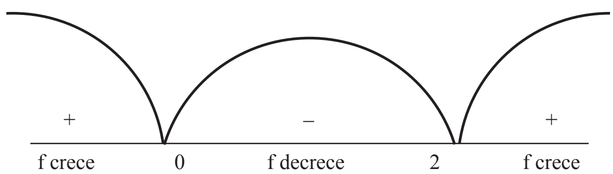
Si $x > 0$ y $x < 2$ es $f'(x) = 2x\,(x - 2) < 0$

Luego, la función tiene un máximo en $x_1 = 0$.

Si $x < 2$ y $x > 0$ es $f'(x) < 0$

Si $x > 2$ es $f'(x) > 0$

Luego, la función alcanza un mínimo en $x_2 = 2$.



Intervalos de crecimiento: $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(0,2)$

Punto de la curva donde f alcanza el máximo: $(x_1\,;\,f(x_1)) = (0;0)$

Punto de la curva donde f alcanza el mínimo: $(x_2\,;\,f(x_2)) = (2\,;\,-\frac{8}{3})$

3) Hallamos los ceros de la función resolviendo la ecuación

$$\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 = 0$$

factoreando:

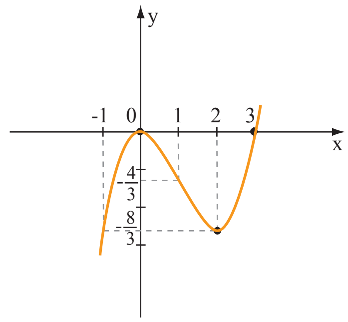
$2x^2\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

Ceros de la función: $x_3 = 0$ y $x_4 = 3$

4) Conocidos los extremos de la función y los puntos donde ésta corta el eje X, podemos hacer la siguiente gráfica aproximada de $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$:



Máximo absoluto

f: $A \rightarrow R$, $(A \subset R)$ tiene un máximo absoluto en $x_0 \in A$ si y solo si

$$\boxed{f(x) \leq f(x_0) \quad \text{para todo} \quad x \in A}$$

El máximo relativo de la función del ejemplo 3 (fig. 22) es un máximo absoluto.

Mínimo absoluto

f: $A \rightarrow R$, $(A \subset R)$ tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in A$ si y sólo si

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) \quad \text{para todo} \quad x \in A}$$

El mínimo relativo de la función del ejemplo 4 (fig. 23) es un mínimo absoluto.

Para aplicar - H

a. Dada f: $R \rightarrow R$ por $f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2$ hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada siguiendo los pasos indicados.

1) Determinar los puntos en los cuales se anula f'(x).
2) Analizar el comportamiento de la función en los entornos de los puntos donde se anula f'(x).
   Máximo/s
   Mínimo/s
   Diagrama de signos de la derivada:
   Intervalo/s de crecimiento:
   Intervalo/s de decrecimiento:
   Punto/s de la curva donde f alcanza el/los máximo/s:
   Punto/s de la curva donde f alcanza el/los mínimo/s:
3) Hallar los ceros de la función.
   Cero/s de la función:
4) Trazar la gráfica aproximada de $f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2$

b. Dada f: R $\rightarrow$ R por $f(x) = x^2 + 5x$, hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada, siguiendo los pasos indicados en **a**.

1)
2)
Máximo/s
Mínimo/s
Diagrama de signos de la derivada:
Intervalo/s de crecimiento:
Intervalo/s de decrecimiento:
Punto/s de la curva donde f alcanza el/los máximo/s:
Punto/s de la curva donde f alcanza el/los mínimo/s:
3)
Cero/s de la función:
4)

c. Dada f: R $\rightarrow$ R por $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$, hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada, siguiendo los pasos indicados en **a**.

1)
2)
Máximo/s
Mínimo/s
Diagrama de signos de la derivada:
Intervalo/s de crecimiento:
Intervalo/s de decrecimiento:
Punto/s de la curva donde f alcanza el/los máximo/s:
Punto/s de la curva donde f alcanza el/los mínimo/s:
3)
Cero/s de la función:
4)

Concavidad. Puntos de inflexión

Dada y = f(x) (fig. 24) consideremos un punto Q de su gráfica donde exista tangente y esta no sea paralela al eje Y.

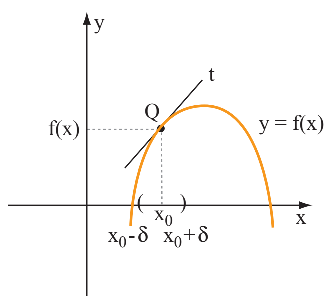


Fig. 24

Llamando t a la tangente a y = f(x) en $Q = (x_0 ; y_0)$ podemos decir, observando la figura 24, que en un entorno de x_0 la gráfica de f se conserva por debajo de t. En este caso se dice que f es cóncava hacia abajo en Q o bien que tiene concavidad negativa en Q.

Decimos que una curva es cóncava hacia abajo o que tiene concavidad negativa en $Q = (x_0;y_0)$ si todos los puntos de la curva próximos a Q están por debajo de la tangente a la curva en el punto Q.
Análogamente, decimos que una curva es cóncava hacia arriba o que tiene concavidad positiva en $Q = (x_0;y_0)$ si todos los puntos de la curva próximos a Q están por arriba de la tangente a la curva en el punto Q (fig. 25).

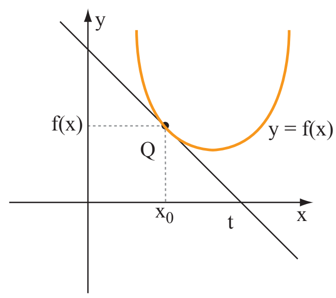


Fig. 25

Una función continua puede presentar concavidad positiva en algunos intervalos y concavidad negativa en otros. Por lo tanto existirán, en esos casos, puntos del dominio donde se produce el cambio de concavidad. **Estos puntos se llaman puntos de inflexión.**

Veamos cómo la determinación de intervalos de concavidad positiva o negativa y puntos de inflexión se relacionan con el signo de la derivada segunda.

Consideremos la gráfica de la funión y = g(x) (fig. 26).

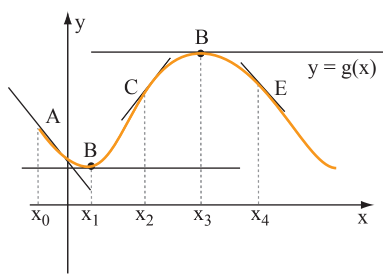


Fig. 26

Observando la gráfica de y = g(x) se ve que la curva tiene concavidad positiva en el intervalo (x_0,x_2) y concavidad negativa en (x_2,x_4).

Por otra parte, analizando la derivada de g se ve que en el intervalo (x_0,x_2), g' es una función creciente pues pasa de ser negativa a ser positiva. Luego, si existe la derivada segunda debe ser $g''(x) > 0$ en (x_0,x_2).

Del mismo modo, se ve que en el intervalo (x_2,x_4) g' es decreciente, pues pasa de positiva a negativa. Luego, si existe g'', debe ser $g''(x) < 0$.

Los puntos, pertenecientes a la gráfica de g, de abscisas x_2 y x_4 son de inflexión, pues en ellos se produce un cambio en el sentido de la concavidad. La derivada segunda en x_2 y x_4 es nula.

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 5

Si f es continua en [a, b] y existe f' en (a, b) entonces:
a. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \varepsilon (a, b)$, f es cóncava hacia arriba en (a,b)
b. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \varepsilon (a, b)$, f es cóncava hacia abajo en (a,b)
c. Si $f''(x_0) = 0$ para algún $x_0 \varepsilon (a, b)$ y cambia de signo en x_0 es $(x_0 ; y_0)$ un punto de inflexión de f.

Ejemplo 6
Dada $f(x) = x^3 - 2x^2$, determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

1) Hallamos los puntos donde se anula la derivada segunda.
$f'(x) = 3x^2 - 4x$
$f''(x) = 6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$

2) Determinamos los intervalos de concavidad.
Resolvemos la inecuación $f''(x) > 0$
$6x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3}$
luego:
f tiene concavidad positiva en $(\frac{2}{3}, +\infty)$

Resolvemos la inecuación $f''(x) < 0$
$6x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{3}$
luego:
f tiene concavidad negativa en $(-\infty, \frac{2}{3})$

Como f cambia de concavidad en $x = \frac{2}{3}$ entonces f tiene un punto de inflexión en $(\frac{2}{3} ; -\frac{16}{27})$.

Para aplicar - I

a. Dada $f(x) = x^3 + x^2$, determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión siguiendo los pasos indicados.
1) Hallar los puntos donde se anula $f''(x)$.
2) Determinar los intervalos de concavidad.
Punto/s de inflexión:

b. Dada $f(x) = x^3 - 3x$, determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión, procediendo como en **a**.
1)
2)
Punto/s de inflexión:

1.3 PROBLEMAS

Problema 1

Con una hoja de cartón de 54 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada y capacidad máxima. Calcular las dimensiones que debe tener la caja.

Solución

Para construir la caja debemos trazar paralelas a los lados a una distancia x de cada borde de la hoja, recortar los cuadrados de lado x determinados en cada esquina y luego doblar la hoja por las líneas marcadas (fig. 27).

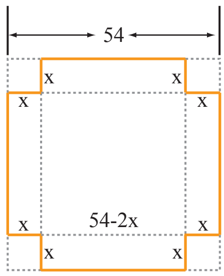


Fig. 27

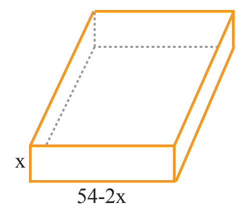


Fig. 28

De esta manera se construye una caja (fig. 28) de altura x, área de la base igual a $(54 - 2x)^2$ y capacidad C, donde:

$$C = (54 - 2x)^2 . x$$

o bien,

$$C = 4x^3 - 216x^2 + 2916\,x$$

y como

C es función de x, es decir, $C = f(x) = 4x^3 - 216x^2 + 2916\,x$ el problema a resolver consiste en hallar un máximo de f(x).

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - 432x + 2916$$

y factoreando resulta:

$$f'(x) = 12\,(x - 27)\,(x - 9)$$

luego:

$$f'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 27 \quad \text{ó} \quad x = 9$$

Si $x = 27$ es $C = 0$, entonces ese valor no nos sirve pues no es posible armar una caja cuya capacidad sea igual a cero.

Si $x = 9$, C toma el valor máximo, pues en $x = 9$, $f'(x)$ pasa de positiva a negativa.

Entonces, las dimensiones de la caja son: lado de la base: 36 cm, altura: 9 cm.

Problema 2

De todos los rectángulos de 25 cm^2 de superficie, ¿cuál es el de menor perímetro?

Solución

Si llamamos **x** a la base, **y** a la altura y **p** al perímetro del rectángulo (fig. 29), es:

$$p = 2x + 2y \quad (1)$$

y como

$$x \,.\, y = 25 \quad \text{es} \quad y = \frac{25}{x} \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1):

$$p = 2x + \frac{50}{x}$$

y como p es función de x, es decir:

$$p = f(x) = 2x + \frac{50}{x}$$

derivando f(x), resulta:

$$f'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$ que se anula para $x = 5$.

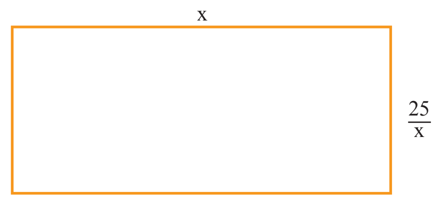


Fig. 29

Estudiando la variación de la derivada en un entorno de 5, se ve que $p = f(x)$ tiene un mínimo en $x = 5$. Luego el rectángulo buscado es un cuadrado de 5 cm de lado.

PARA EJERCITAR

21. Determinar los intervalos en los cuales las siguientes curvas son crecientes o decrecientes y hallar sus extremos relativos.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ b) $f(x) = 5x - x^5$ c) $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$

22. Determinar los intervalos de concavidad de las siguientes curvas y hallar sus puntos de inflexión.

a) $f(x) = \frac{x^3}{2} + 2$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3$ c) $f(x) = -x^3 + 4x^2$

23. Determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ b) $f(x) = \cos x$ en $[0, \frac{3}{2}\pi]$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

24. Dada $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$, determinar:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Intervalos de concavidad.
c) Máximos y mínimos relativos.
d) Puntos de inflexión.
Construir la gráfica de la función.

25. Determinar intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$. Graficar la función en el intervalo (-5, 5).

26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ en el punto de inflexión.

27. Hallar los extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x) = \text{sen } 2x$ en el intervalo $[0, \frac{3}{2}\pi]$

28. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{x+2} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x^3}{3}-2x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

determinar:
a) Puntos de discontinuidad.
b) Máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión.
d) Ecuación de la recta tangente en $x = 3$.
e) Ecuación de la recta perpendicular a la recta tangente en $x = 3$, en el punto de tangencia.
f) Puntos del intervalo $(-\infty, 0)$ donde la tangente tiene pendiente $\frac{3}{2}$.

29. Calcular el número positivo que sumado con su inverso multiplicativo da por resultado una suma mínima.

30. Con 40 dam de alambre se quiere delimitar una superficie rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

31. Sobre un hexágono se construye una pirámide regular de arista lateral 8. Hallar su altura para que el volumen sea máximo.

32. Calcular la altura y el radio de un tanque cilíndrico sin tapa para que, con una capacidad de 10 kl, tenga superficie mínima.

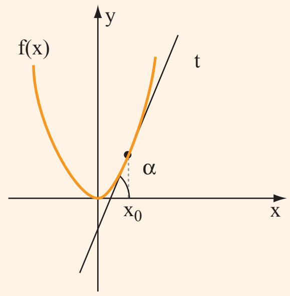
33. Resolver el problema planteado en la introducción.

PARA RECORDAR

DERIVADA

• Derivada de una función en un punto

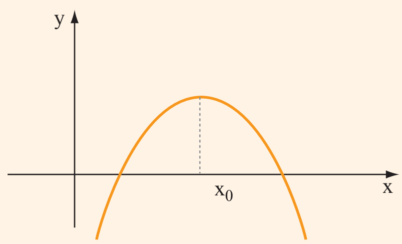
$f'(x_0) = a = \operatorname{tg} \alpha$



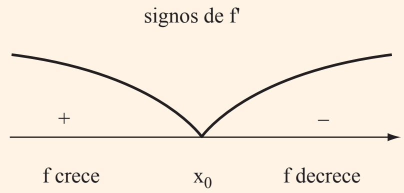
VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES

• Extremos relativos

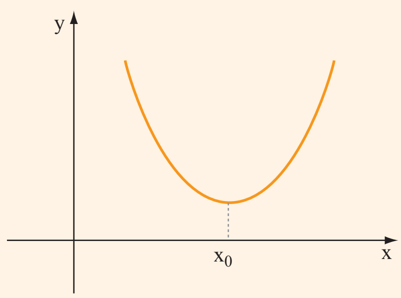
f tiene un máximo relativo en x_0 si:



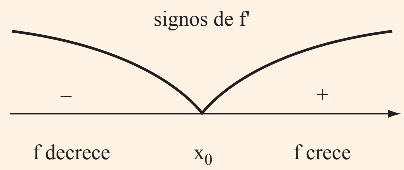
$f'(x_0) = 0$ y



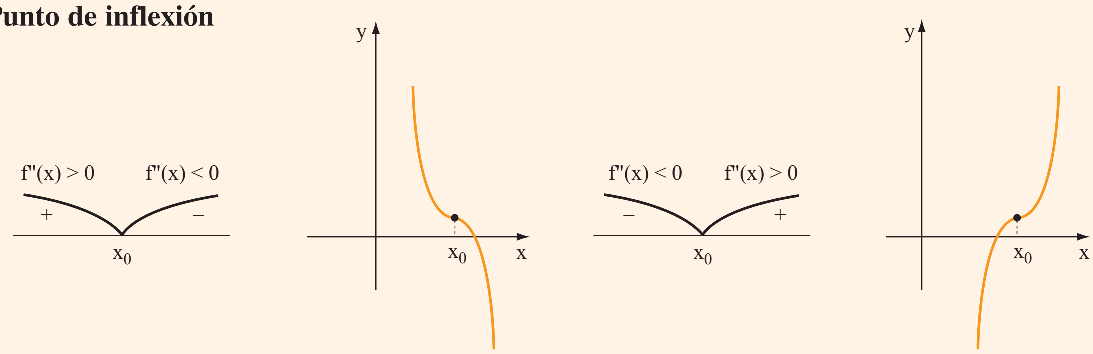
f tiene un mínimo relativo en x_0 si:



$f'(x_0) = 0$ y



• Punto de inflexión



$(x_0\ ;\ y_0)$ es un punto de inflexión de f si:

$$f''(x_0) = 0 \text{ y } f'' \text{ cambia de signo en } x_0$$